Mathématiques générales II (MATH0009)

Année académique 2024-2025

Corrigé de l'interrogation du 18 avril 2025

Version 18 mars 2025

QUESTIONNAIRE

Questions de théorie

1. (a) Quel est le domaine de définition de la fonction exponentielle ?
   (b) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?
   (c) Enoncer précisément les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien faisant intervenir une somme et un produit.
   (d) Soient les complexes α, β. **Démontrer** que le polynôme $z \mapsto z^2 + \alpha z + \beta$ possède deux zéros.

2. QCM : Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0.25 ; pas de réponse : 0.
   (a) Si z est un complexe quelconque alors la partie réelle $1 + i\bar{z}$ est toujours égale à
   - ☐ 1
   - ☐ $\Im(z)$
   - ☐ $-\Im(z)$
   - ☐ $1 + \Im(z)$
   - ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

   (b) On donne la fonction $x \mapsto x^t$ où t est un paramètre réel. La condition nécessaire et suffisante sur t pour que la fonction soit intégrable en $+\infty$ est
   - ☐ $t > 0$.
   - ☐ $t < 0$.
   - ☐ $t > 1$.
   - ☐ $t < -1$.
   - ☐ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercices

1. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$(a) \lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} \ln(t) \qquad (b) \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{2x^2+1}{3-2x}\right)$$

2. Déterminer la partie imaginaire et le module du complexe $z = i^{2025}/(i-1)^4$.
3. Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille.

$$D^2 f(x) - 3Df(x) + 2f(x) = e^{2x}$$

4. On donne la fonction f explicitement par

$$f(x) = \sqrt{1-2x}\ .$$

   (a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.
   (b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.
   (c) Dans un même repère orthonormé, représenter l'approximation à l'ordre 1 ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport au graphique de l'approximation **en utilisant la notion de reste**.
5. Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante et simplifier votre réponse au maximum.

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{4x^2 - 12x + 9}\, dx$$

6. (a) L'expression suivante est-elle définie ? Justifier.

$$\exp\Big(3\ln(\cos(-\pi/3))\Big)$$

(b) Si elle est définie, en vous servant des propriétés des fonctions élémentaires, simplifier cette expression au maximum.

CORRIGE

Questions de théorie

1. **(a) Quel est le domaine de définition de la fonction exponentielle ?**
   (b) Quel est le domaine de définition de la fonction logarithme népérien ?
   (c) Enoncer précisément les propriétés fondamentales de la fonction exponentielle et de la fonction logarithme népérien faisant intervenir une somme et un produit.
   (d) Soient les complexes α, β. Démontrer que le polynôme $z \mapsto z^2 + \alpha z + \beta$ possède deux zéros.

   Solution. Voir cours (amphi et syllabus).

2. **QCM : Réponse correcte : +1 ; réponse incorrecte : -0.25 ; pas de réponse : 0.**

   (a) Si z est un complexe quelconque alors la partie réelle $1 + i\bar{z}$ est toujours égale à
   □ 1
   □ $\Im(z)$
   □ $-\Im(z)$
   ♣ $1 + \Im(z)$
   □ Aucune des autres réponses n'est correcte.

   (b) On donne la fonction $x \mapsto x^t$ où t est un paramètre réel. La condition nécessaire et suffisante sur t pour que la fonction soit intégrable en $+\infty$ est
   □ $t > 0$.
   □ $t < 0$.
   □ $t > 1$.
   ♣ $t < -1$.
   □ Aucune des autres réponses n'est correcte.

Exercices

1. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$(a) \lim_{t \to 0^+} \sqrt{t} \ln(t) \qquad (b) \lim_{x \to +\infty} \arctan\left(\frac{2x^2+1}{3-2x}\right)$$

Solution. (a) La fonction $f : x \mapsto \sqrt{t}\ln(t)$ est définie sur $]0, +\infty[$ et comme tout intervalle ouvert comprenant 0 est d'intersection non vide avec $]0, +\infty[$, la limite demandée a un sens.

Si on essaye de passer directement à la limite, on obtient la forme indéterminée « $0 \times (-\infty)$ » et on ne sait pas conclure ; il faut donc procéder autrement.

En écrivant le produit $\sqrt{t}\ln(t)$ sous la forme du quotient

$$\frac{\ln(t)}{t^{-1/2}},$$

la limite en 0^+ des numérateur et dénominateur est alors infinie et on peut essayer d'appliquer le théorème de l'Hospital. Considérons $V =]0, \varepsilon[$ avec $\varepsilon > 0$ ainsi que les fonctions $F : t \mapsto \ln(t)$ et $h : t \mapsto t^{-1/2}$. Ces fonctions sont dérivables sur V, la dérivée $Dh(t) = (-1/2)\, t^{-3/2}$ ne s'annule en aucun point de V et on a

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{DF(t)}{Dh(t)} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^{-1}}{(-1/2)\, t^{-3/2}} = \lim_{t \to 0^+} (-2\, t^{1/2}) = 0.$$

Par le théorème de l'Hopital on obtient ainsi

$$\lim_{t\to 0^+}(\sqrt{t}\ln(t)) = 0.$$

(b) La fonction $f : x \mapsto \arctan\Big((2x^2+1)/(3-2x)\Big)$ est définie sur $A = \mathbb{R}\setminus\{3/2\}$, ensemble non majoré ; on peut donc envisager la limite. Cela étant, on a

$$f(x) \;=\; \arctan(g(x)) \quad \text{avec} \quad g(x) = \frac{2x^2+1}{3-2x} \quad \text{et} \quad x \in A.$$

Comme $\lim_{x\to+\infty}\; g(x) = -\infty$ on obtient

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) \;=\; \lim_{y\to-\infty}\arctan(y) \;=\; -\pi/2.$$

2. **Déterminer la partie imaginaire et le module du complexe $z = i^{2025}/(i-1)^4$.**
   Solution. Puisque $i^{4n} = 1$ quel que soit le naturel n et $(i-1)^2 = -2i$, on a

$$z = \frac{i^{2025}}{(i-1)^4} = \frac{i}{-4}.$$

La partie imaginaire du complexe donné vaut donc $-1/4$ et son module $1/4$.

3. **Résoudre l'équation différentielle suivante, en spécifiant dans quel intervalle on travaille.**

$$D^2f(x) - 3Df(x) + 2f(x) = e^{2x}$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.

L'équation homogène associée est $D^2f - 3Df + 2f = 0$; le polynôme caractéristique est alors $z \mapsto z^2 - 3z + 2 = (z-2)(z-1)$ et ses zéros sont 1 et 2. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x) = c_1e^x + c_2e^{2x},\; x \in \mathbb{R}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

Cherchons une solution particulière sur $\mathbb{R}$ puisque le second membre $g : x \mapsto e^{2x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Le second membre de cette équation est l'exponentielle polynôme $x \mapsto 1 \times e^{2x}$, produit d'un polynôme de degré 0 et d'une exponentielle dont le coefficient 2 de la variable est un zéro simple du polynôme caractéristique. Une solution particulière est donc du type $f_P(x) = Ax\,e^{2x},\; x \in \mathbb{R}$ où A est une constante à déterminer.

Comme $Df_P(x) = A(1+2x)e^{2x}$ et $D^2f_P(x) = A(4+4x)e^{2x}$, en remplaçant dans l'équation donnée, on a successivement

$$\begin{aligned}
&A(4+4x)e^{2x} - 3A(1+2x)e^{2x} + 2Axe^{2x} = e^{2x}\ \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & A(4+4x) - A(3+6x) + 2Ax = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & (4-3)A + (4-6+2)Ax = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}\\
\Leftrightarrow\quad & A = 1.
\end{aligned}$$

On obtient donc

$$f_P(x) = x\,e^{2x},\; x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, les solutions de l'équation donnée sont les fonctions

$$c_1e^x + c_2e^{2x} + x\,e^{2x},\; x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

4. **On donne la fonction f explicitement par**

$$f(x) = \sqrt{1-2x}\ .$$

(a) En déterminer les approximations polynomiales à l'ordre 1 et 2 en 0.

Solution. La fonction f est indéfiniment continûment dérivable sur $]-\infty, 1/2[$. En dérivant, on a successivement

$$Df(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-2x}}, \quad D^2f(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-2x)^3}}.$$

Comme $f(0) = 1$, $Df(0) = -1$ et $D^2f(0) = -1$, si on note P_n l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, on obtient

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(0) + Df(0)\,x \ = \ 1 - x, \\ P_2(x) &= f(0) + Df(0)\,x + D^2f(0)\,\frac{x^2}{2} \ = 1 - \ x - \frac{x^2}{2},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Donner une expression explicite du reste de ces approximations.

Solution. On a

$$D^2f(x) = \frac{-1}{\sqrt{(1-2x)^3}} \quad \text{et} \quad D^3f(x) = \frac{-3}{\sqrt{(1-2x)^5}}.$$

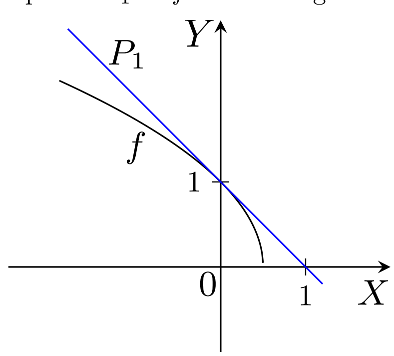
Dès lors, si on désigne par R_n le reste de l'approximation polynomiale de f à l'ordre n en 0, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe u_1 et u_2 compris entre 0 et x tels que

$$\begin{aligned} R_1(x) &= D^2f(u_1) \times \frac{x^2}{2} = \frac{-1}{\sqrt{(1-2u_1)^3}} \times \frac{x^2}{2}\ , \\ R_2(x) &= D^3f(u_2) \times \frac{x^3}{3!} = \frac{-3}{\sqrt{(1-2u_2)^5}} \times \frac{x^3}{3!} = \frac{-1}{\sqrt{(1-2u_2)^5}} \times \frac{x^3}{2},\ x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(c) Dans un même repère orthonormé, représenter l'approximation à l'ordre 1 ; représenter aussi f au voisinage de 0 et justifier la position du graphique de la fonction f par rapport au graphique de l'approximation en utilisant la notion de reste.

Solution. Vu l'expression du reste R_1, on voit que $R_1(x)$ est toujours négatif pour x voisin de 0. Dès lors le graphique de f est situé en dessous de celui de P_1 au voisinage de 0.

Voici la représentation graphique de P_1 et f au voisinage de 0.



5. **Si elle existe, déterminer la valeur de l'intégrale suivante et simplifier votre réponse au maximum.**

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{4x^2 - 12x + 9}\ dx$$

Solution. La fonction $f : x \mapsto 1/(4x^2 - 12x + 9) = 1/(2x-3)^2$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{3/2\}$ donc sur le fermé non borné $[2, +\infty[$. Pour étudier son intégrabilité en $+\infty$, comme la fonction est positive sur $[2, +\infty[$, on utilise la définition et on calcule la limite

$$\lim_{t \to +\infty} \int_2^t \frac{1}{(2x-3)^2}\ dx.$$

Si cette limite est finie, la fonction sera intégrable en $+\infty$ donc sur $[2,+\infty[$ et la valeur de la limite sera la valeur de l'intégrale.

On a successivement

$$\begin{aligned}
\int_2^t \frac{1}{(2x-3)^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_2^t \frac{2}{(2x-3)^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2x-3}\right]_2^t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{2t-3}+1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{2t-4}{2t-3}\right).
\end{aligned}$$

Comme on a

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{2t-4}{2t-3}=1$$

on obtient

$$\lim_{t\to+\infty}\int_2^t \frac{1}{(2x-3)^2}\,dx=\frac{1}{2}$$

Ainsi, comme la limite est finie, la fonction est intégrable sur $[2,+\infty[$ et son intégrale sur cet ensemble est égale à cette limite, c'est-à-dire $1/2$.

6. **(a) L'expression suivante est-elle définie ? Justifier.**

$$\exp\Big(3\ln(\cos(-\pi/3))\Big)$$

Solution. Le domaine de définition de l'exponentielle est $\mathbb{R}$, celui de ln est $]0,+\infty[$ et celui du cosinus est $\mathbb{R}$. Comme $\cos(-\pi/3)>0$, l'argument du logarithme est positif ; l'expression est donc définie.

(b) Si elle est définie, en vous servant des propriétés des fonctions élémentaires, simplifier cette expression au maximum.

Solution. On sait que

$$\cos(-\pi/3)=\cos(\pi/3)=1/2 \quad \text{et} \quad 3\ln(1/2)=\ln((1/2)^3)=\ln(1/8).$$

Comme les fonctions exponentielle et logarithme sont inverses l'une de l'autre, l'expression donnée vaut $1/8$.